Licence ès sciences économiques
Mathématiques Corrigé TD 1

Cours de B. Guerrien et S. Jallais

2003-2004

Exercice 1 (offre de travail)

$$N^*(w) = N_s(w, f(w))$$

Rappel si $f(\cdot)$ est de classe C^1 en $(g(t), h(t))$, et si $g(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont dérivables en t, alors la fonction $F(\cdot)$ définie par : $F(t) = f(g(t), h(t))$ est dérivable en t, et on a :

$$F'(t) = f'_x(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + f'_y(g(t), h(t)) \cdot h'(t)$$

Appliquons la formule de la dérivée en chaîne, en observant que :

$$N^*(w) = (N_s)(g(w), f(w)) \quad (g(w) = w)$$

Le résultat est immédiat :

$$(N^*)'(w) = \underbrace{1}_{g'(w)} \times (N_s)'_x(g(w), f(w)) + f'(w)(N_s)'_y(g(w), f(w))$$

Du terme général de la dérivée ci-dessus, on tire simplement la valeur de la dérivée en w_0 en substituant w_0 à w dans l'équation (et, accessoirement R_0 à $f(w_0)$) :

$$(N^*)'(w_0) = (N_s)'_x(g(w_0), R_0) + f'(w_0)(N_s)'_y(g(w_0), R_0)$$

Si $f(w) = aw + b$, alors $f'(w) = a$ et l'équation se réécrit :

$$(N^*)'(w_0) = (N_s)'_x(g(w_0), R_0) + \underbrace{a}_{f'(w)}(N_s)'_y(g(w_0), R_0)$$

Exercice 2 (salaire d'efficience)

$$\pi(s,L) = p \cdot f(e(s) \cdot L) - sL.$$

On applique la formule de la dérivation en chaîne à $\pi(s,L)$, pour trouver les dérivées (partielles) de cette fonction :

$$\pi_s(s,L) = f'(\underbrace{e(s) \cdot L}_{g(s)}) \cdot \underbrace{e'(s)L}_{g'(s)} - L$$
$$\pi_L(s,L) = f'(\underbrace{e(s) \cdot L}_{h(L)}) \cdot \underbrace{e(s)}_{h'(L)} - s$$

Exercice 3 $M(\cdot)$ est homogène de degré 1 et de classe C^1

Rappel Soit f :

$$\begin{aligned} E &\to F \\ X &\mapsto f(X) \end{aligned}$$

f est dite "homogène de degré k" ssi $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda X) = \lambda^k f(X)$
Exemple : $f : x \mapsto x^2$ homogène de degré 2.

a) On pose $\theta = u/v$. $M(v,u)$ est homogène de degré 1, donc, soit $\lambda = \frac{1}{v}$, on applique la définition de l'homogénéité :

$$M(\lambda \cdot v, \lambda \cdot u) = M\left(\frac{v}{v}, \frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v} \cdot M(v,u) = M\left(1, \frac{1}{\theta}\right) = m(\theta)$$

Pour calculer $m'(\theta)$ il suffit ensuite d'appliquer la formule des dérivations en chaîne :

$$m'(\theta) = \underbrace{0}_{\textit{dérivée de 1 par rapport à } \theta} \cdot M'_v\left(1, \frac{1}{\theta}\right) + M'_u\left(1, \frac{1}{\theta}\right) \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{\theta^2}\right)}_{\textit{dérivée de } \frac{1}{\theta}}$$

b) Comme $M(\cdot)$ est homogène de degré 1,

$$\frac{M(v,u)}{u} = M\left(\frac{v}{u}, 1\right) = M(\theta, 1) = \theta M\left(1, \frac{1}{\theta}\right) \quad (\textit{encore à cause de l'homogénéité})$$

D'où :

$$\frac{M(v,u)}{u} = \theta m(\theta)$$

Le calcul de la dérivée est immédiat, sachant (uv)'=u'v+uv' :

$$\frac{d\theta m(\theta)}{d\theta} = m(\theta) + \theta m'(\theta)$$

Exercice 4

a) On applique la formule de la dérivation en chaîne à $Q(t) = F(K(t), L(t))$:

$$\dot{Q} = \dot{K} \cdot F'_K(K, L) + \dot{L} \cdot F'_L(K, L)$$

b) En divisant l'expression précédente par Q, on obtient :

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \dot{K} \cdot \frac{F'_K(K, L)}{Q} + \dot{L} \cdot \frac{F'_L(K, L)}{Q}$$

On peut réécrire cette expression de la sorte :

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{K}}{K} \cdot K \frac{F'_K(K, L)}{Q} + \frac{\dot{L}}{L} \cdot L \frac{F'_L(K, L)}{Q}$$

D'où, d'après la définition de α_K et α_L :

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{K}}{K} \cdot \alpha_K + \frac{\dot{L}}{L} \cdot \alpha_L$$

c)

Rappel La dérivée du logarithme d'une variable par rapport au temps donne le taux de croissance de la variable :

$$\frac{d \ln u}{dt} = \frac{\dot{u}}{u}$$

Remarque : on note généralement $\dot{u}$ la dérivée de u par rapport au temps.

On met l'expression de Q en log :

$$\ln Q(t) = \ln a(t) + \ln F(K(t), L(t))$$

On calcule la dérivée de $\ln Q(t)$ par raport au temps :

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{K} \cdot F'_K(K, L) + \dot{L} \cdot F'_L(K, L)}{F(K, L)}$$

On peut réécrire cela sous la forme :

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{a\dot{K} \cdot F'_K(K, L) + a\dot{L} \cdot F'_L(K, L)}{a \cdot F(K, L)} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{a\dot{K} \cdot F'_K(K, L)}{Q} + \frac{a\dot{L} \cdot F'_L(K, L)}{Q}$$

Et donc, en applicant le résultat du b) :

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{a}}{a} + a \cdot \frac{\dot{K}}{K} \cdot \alpha_K + a \cdot \frac{\dot{L}}{L} \cdot \alpha_L$$