Licence ès sciences économiques
Mathématiques Corrigé TD 2

Cours de B. Guerrien et S. Jallais

2003-2004

Exercice 1 Soit une fonction $F(\cdot)$ qui associe au couple (K, L), avec $K > 0$ et $L > 0$, le nombre strictement positif $F(K, L)$. On suppose $F(\cdot)$ de classe $\mathcal{C}^2$ et homogène de degré 1.

1. La définition de l'homogénéité de degré 1 implique l'égalité suivante :

$$F(K, L) = L \cdot F\left(\frac{K}{L}, 1\right). \tag{1}$$

On pose : $K/L = k$ et $f(k) = F(k, 1)$.

2. On sait que, si f est une fonction dérivable et homogène de degré k sur un intervalle I, ses dérivées partielles sont homogènes de degré $k-1$. F est de classe $\mathcal{C}^2$ et est homogène de degré 1, ses dérivées partielles sont donc homogènes de degré 0.
On a :

$$F'_K(K, L) = L \cdot F'_K\left(\frac{K}{L}, 1\right) \overset{\textit{dérivation en chaîne}}{=} \frac{L}{L} \cdot F'_k(k, 1) = f'(k)$$

D'après le théorème d'Euler, F étant homogène de degré 1.

$$K \cdot F'_K(K, L) + L \cdot F'_L(K, L) = F(K, L)$$

$$\Leftrightarrow F'_L(K, L) = \frac{F(K, L) - K \cdot F'_K(K, L)}{L} = f(k) - k \cdot f'(k)$$

A partir de (1), on a (dérivation de fonctions composées) :

$$F'_L(K, L) = \underbrace{F\left(\frac{K}{L}, 1\right)}_{f(k)} + \underbrace{L \cdot \left(-\frac{K}{L^2}\right) F'_k\left(\frac{K}{L}, 1\right)}_{-k \cdot f(k)}$$

3. On dérive par rapport à K les deux membres de l'égalité $F'_K(K,L) = f'(K/L)$:
$$F''_{K^2}(K,L) = \frac{f''(k)}{L}$$
Si on dérive par rapport L, il vient :
$$F''_{KL}(K,L) = -\frac{k}{L} \cdot f''(k)$$
Enfin, on dérive par rapport à L les deux membres de l'égalité :
$$F'_L(K,L) = f(k) - \frac{K}{L}f'(k)$$
Il vient :
$$F''_{L^2}(K,L) = -K\frac{f'(k)}{L^2} + K\frac{f'(k)}{L^2} + K^2\frac{f''(k)}{L^3} = K^2\frac{f''(k)}{L^3}$$
Comme F est de classe $\mathcal{C}^2$, il n'est pas besoin de calculer F''_{LK}, car $F''_{LK} = F''_{KL}$.

Rappel : Théorème de Young. Soit J un ensemble ouvert $\mathbb{R}^n$. Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de J dans $\mathbb{R}$. $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in J$ et pour toute paire d'indice i, j :
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$
Remarque : les dérivées secondes sont homogènes de degré -1, ce qui explique qu'on ne puisse les exprimer uniquement en fonction de k et qu'il reste des K et L.

4. On a :
$$Q = L.F(\frac{K}{L}, 1)$$
$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{F}(\frac{K}{L}, 1)}{F(\frac{K}{L}, 1)} = \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2}\frac{f'(k)}{f(k)}$$
Or on sait que : $f'(k) = F'_K(K,L)$. On peut donc réécrire l'expression précédente :
$$\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{K}F'_K(K,L)}{F(K,L)} - \frac{\dot{L}KF'_K(K,L)}{LF(K,L)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{Q}}{Q} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{K} \cdot \alpha_K - \frac{\dot{L}}{L} \cdot \alpha_K$$

D'où :

$$\frac{\dot{q}}{q} = \alpha_K \cdot \frac{\dot{k}}{k}$$

Exercice 2 Soit une fonction $f(\cdot)$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui au couple (x_1, x_2) fait correspondre le nombre $f(x_1, x_2)$.

1.

$$F(s,t) = f\left(e^{st}, \frac{s}{t^2}\right).$$

$$F'_s(s,t) = f'_{x_1}\left(e^{st}, \frac{s}{t^2}\right) \cdot te^{st} + f'_{x_2}\left(e^{st}, \frac{s}{t^2}\right) \cdot \frac{1}{t^2}.$$

$$F'_t(s,t) = f'_{x_1}\left(e^{st}, \frac{s}{t^2}\right) \cdot se^{st} + f'_{x_2}\left(e^{st}, \frac{s}{t^2}\right) \cdot \frac{-2s}{t^3}.$$

2. Soit la fonction $g(\cdot)$ définie implicitement par l'équation :

$$f(g^2(x), g(x) + x) = 3.$$

On suppose que $g(0) = 1$ et que les dérivées partielles de $f(\cdot)$ sont toutes deux égales à 1 au point (1,1). On dérive (par rapport à x) les deux membres de cette équation. Soit :

$$f'_{x_1}(g^2(x), g(x) + x)(2g(x)g'(x)) + f'_{x_2}(g^2(x), g(x) + x)(g'(x) + 1) = 0$$

D'où, en faisant $x = 0$:

$$f'_{x_1}(g^2(0), g(0))(2g(0)g'(0)) + f'_{x_2}(g^2(0), g(0))(g'(0) + 1) = 0$$

Et comme $g(0) = 1$:

$$f'_{x_1}(1,1)(2g'(0)) + f'_{x_2}(1,1)(g'(0) + 1) = 0$$

Soit, comme les dérivées de f en $(1,1)$ sont supposées égales à 1 :

$$3g'(0) + 1 = 0$$

Et donc :

$$g'(0)) = -\frac{1}{3}$$

Exercice 3

1. Les équations IS-LM s'écrivent :

$$\begin{aligned} &Y(G,M) = C(Y(G,M)) + G + I(i(G,M)) \\ &M = L(Y(G,M), i(G,M)) \end{aligned}$$

2. La dérivation des deux côtés des égalités par rapport à G donne (dérivation en chaîne) :

$$\begin{aligned} &Y'_G(G,M) = Y'_G(G,M) \cdot C'_Y(Y) + 1 + i'_G(G,M) \cdot I'_i(i) \\ &0 = Y'_G(G,M) \cdot L'_Y(Y,i) + i'_G(G,M) \cdot L'_i(Y,i) \end{aligned}$$

En posant :

$$X = \begin{pmatrix} Y'_G(G,M) \\ i'_G(G,M) \end{pmatrix}$$

On peut réécrire le système d'équation précédent sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} C'_Y(Y) - 1 & I'_i(i) \\ L'_Y(Y,i) & L'_i(Y,i) \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} Y'_G(G,M) \\ i'_G(G,M) \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

Rappel : Méthode de Cramer. Soit A une matrice composée de n vecteurs colonnes $A_i,\ i \in \{1, \dots, n\}$. D'après les propriétés du déterminant, on a $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} &\det(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) \\ &\det(A_1, \dots, A_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} A_k, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) \end{aligned}$$

Soit le vecteur B tel que :

$$B = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = A_1 \cdot x_1 + \ldots + A_p \cdot x_p$$

Dans l'expression du déterminant, remplaçons le vecteur A_i par le vecteur B, et appelons Δ_i cette nouvelle variable :

$$\Delta_i = \det(A_1, \dots, B, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, x_i A_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} x_k A_k, \dots, A_n)$$

D'après les propriétés évoquées plus haut, cela implique :

$$\Delta_i = x_i \det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n) = x_i \det(A)$$

La méthode de Cramer pour résoudre un système d'équations linéaires consiste donc à calculer pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$ les rapports $\Delta_i / \det(A) = x_i$.

En applicant cette méthode ici, on trouve :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & I'_i(i) \\ 0 & L'_i(Y,i) \end{vmatrix} = -L'_i(Y,i)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} C'_Y(Y) - 1 & -1 \\ L'_Y(Y,i) & 0 \end{vmatrix} = L'_Y(Y,i)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} C'_Y(Y) - 1 & I'_i(i) \\ L'_Y(Y,i) & L'_i(Y,i) \end{vmatrix} = (C'_Y(Y)-1) \cdot L'_i(Y,i) - L'_Y(Y,i) \cdot I'_i(i)$$

Et donc :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\det(A)} \\ \frac{\Delta_2}{\det(A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-L'_i(Y,i)}{(C'_Y(Y)-1) \cdot L'_i(Y,i) - L'_Y(Y,i) \cdot I'_i(i)} \\ \frac{L'_Y(Y,i)}{(C'_Y(Y)-1) \cdot L'_i(Y,i) - L'_Y(Y,i) \cdot I'_i(i)} \end{pmatrix}$$

3. Etant donné les informations de l'énnoncé, et en précisant que $C'_Y \leq 1$ (la propension marginale à consommer est comprise entre 0 et 1), il vient immédiatement :

$$Y'_G(G,M) > 0$$
$$i'_G(G,M) > 0$$