# Eléments de corrigé du TD 5

I. 1. $\dot{X}(t) = AX(t)$, où $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $A$ est diagonalisable, alors $X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} P_1 + \beta e^{\lambda_2 t} P_2$ où $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les valeurs propres de $A$, et $P_1$ et $P_2$, (deux de) leurs vecteurs propres associés.

$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)$. Les deux racines de ce polynôme sont donc $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 4$. $A$ a deux valeurs propres distinctes; elle est donc diagonalisable.

$P_1$, le vecteur propre associé à 3, est tel que $AP_1 = 3P_1 \Leftrightarrow (A - 3I)P_1 = \vec{0}$.

$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$. Comme $C_1 + C_2 = 0$, l'un des vecteurs propres associés à 3 est $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Par la même méthode, on trouve $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, l'un des vecteurs propres associés à 4.

Conclusion : $X(t) = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. $\dot{X}(t) = AX(t)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(-\lambda - 1)$ : ce polynôme a une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ et une racine simple $\lambda_3 = -1$.

$A$ est donc diagonalisable si le sous-espace propre associé à 2 est de dimension 2.

Les vecteurs propres $P_i$ associés à 2 sont tels que $AP_i = 2P_i \Leftrightarrow (A - 2I)P_i = \vec{0}$.

Or $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$. Comme $C_1 - C_2 + 0C_3 = 0$ et $C_1 + 0C_2 - C_3 = 0$,

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres (linéairement indépendants) associés à 2. (A est donc diagonalisable).

Par la même méthode, on trouve $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, l'un des vecteurs propres associés à -1.

Conclusion : $X(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \chi e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.