

Licence ès sciences économiques

Mathématiques Corrigé TD 6

Exercice 2

1. Par définition, un processus est à l'équilibre lorsqu'il est stationnaire. Le processus défini l'équation $\dot{x} = -\ln x$ est donc à l'équilibre au point x tel que :

$$\dot{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

2. Un diagramme de phase permet de représenter graphiquement la dynamique d'un système. Lorsque le système est défini par une équation différentielle d'ordre 1 (ne comprenant qu'une dérivée première de la fonction), on trace la courbe de $\dot{x} = f(x)$ dans le repère orthogonal (\dot{x}, x) : voir la Figure 1

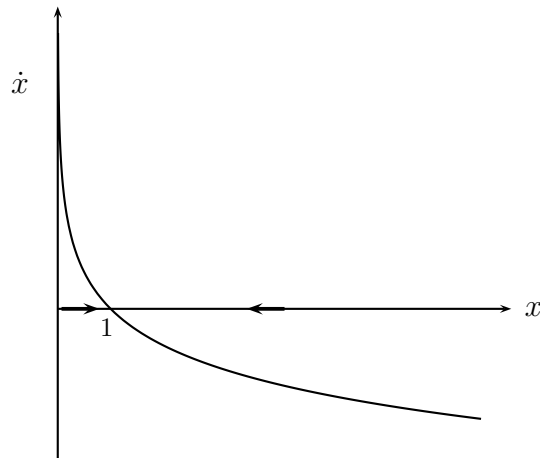


FIG. 1 – Diagramme de phase de $\dot{x} = -\ln x$

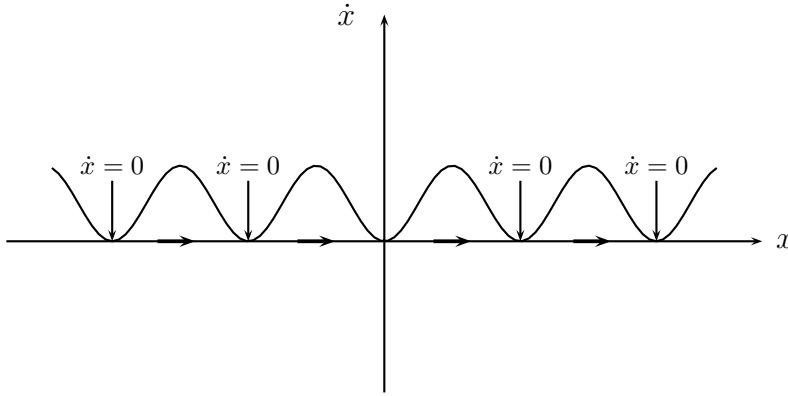


FIG. 2 – Diagramme de phase de $\dot{x} = \sin^2(x)$

Rappel L'ensemble de stabilité de l'équilibre x^* dans un ensemble E du processus défini par $\dot{x} = f(x)$ est :

- (a) la solution $x(t)$ de $\dot{x} = f(x)$ telle que $x(0) = x_0$ existe.
- (b) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in E$.
- (c) $x(t)$ tend vers x^* quand t tend vers $+\infty$.

On note $S_E(x^*)$ l'ensemble de stabilité dans E de x^* .

Si E n'est pas précisé (comme ici), on considère que E est l'ensemble de définition de la fonction f .

L'ensemble de stabilité de $x^* = 1$ sur \mathbb{R}_+^* (ensemble de définition de la fonction $f(x) = -\ln x$) est \mathbb{R}_+^* . En effet, $\forall x \in]0, 1]$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\dot{x} > 0$. Tant que $x \in]0, 1]$, x croît, jusqu'à $x = 1$, où $\dot{x} = 0$. Donc $\forall x \in]0, 1]$, $x \in S_{\mathbb{R}_+^*}(x)$. De même $\forall x \in [1, +\infty[$, $x \in S_{\mathbb{R}_+^*}(x)$.

3. On refait exactement la même chose : L'ensemble des équilibres sont les points x^* solution de l'équation $\dot{x} = 0$: $x^* = k\pi$, k entier. On représente très facilement le diagramme de phase (voir Figure 2), et chaque équilibre $x_k^* = k\pi$ a un ensemble de stabilité $S_{\mathbb{R}}(x_k^*) =](k-1)\pi, k\pi]$

Exercice 4

1. Par définition, un processus est à l'équilibre lorsqu'il est stationnaire. Le processus défini le système d'équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2y - 6 \\ \dot{y} = x^2 + y - 5 \end{cases}$$

est donc à l'équilibre au point $X = (x, y)$ tel que :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} 0 = x^2y - 6 \\ 0 = x^2 + y - 5 \end{cases}$$

Et donc :

$$\frac{6}{y} = x^2 \tag{1}$$

$$0 = \frac{6}{y} + y - 5 \tag{2}$$

On obtient un binôme du second degré en multipliant les deux termes de l'équation 2 par y . On trouve facilement les solutions du binôme et par là les valeurs de y qui satisfont le système, on en déduit les

valeurs de x qui satisfont le système, on a ainsi l'ensemble des points X d'équilibre :

$$\begin{cases} X_e^1 = (x_e^1, y_e^1) = (\sqrt{3}, 2) \\ X_e^2 = (x_e^2, y_e^1) = (-\sqrt{3}, 2) \\ X_e^3 = (x_e^1, y_e^2) = (\sqrt{3}, 3) \\ X_e^4 = (x_e^2, y_e^2) = (-\sqrt{3}, 3) \end{cases}$$

2. Comme les fonctions de courbe $y = \frac{6}{x^2}$ et $y = -x^2 + 5$ sont paires (symétriques par rapport à l'axe des ordonnées), on peut se contenter de représenter le graphique pour \mathbb{R}_+ . Dans un diagramme de phase correspondant à un processus dynamique à deux variables, on va représenter non plus les dérivées premières \dot{x} et \dot{y} dont les courbes sont à présent en *trois dimensions*, mais des courbes de niveaux bien choisies, c'est à dire l'ensemble des points tels que $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = 0$. On appelle ces courbes des *isoclines nulles* car elles représentent respectivement pour les courbes des fonctions $x(t)$ et $y(t)$, l'ensemble des points où la pente est nulle (tangente horizontale).
3. La matrice jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice jacobienne nous permet de faire une approximation linéaire locale du processus dynamique (ici non linéaire). Ecrivons $X = (x, y)$ sous forme de vecteur :

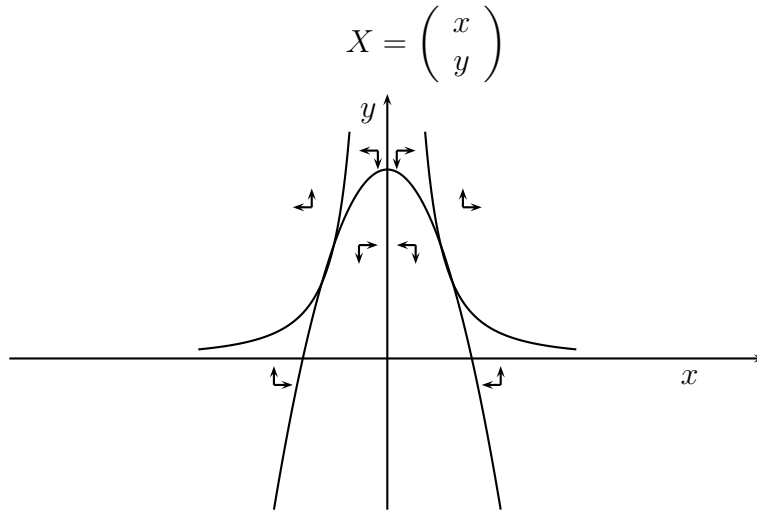


FIG. 1 – Diagramme de phase du système différentiel

Rappel d'algèbre Dérivation d'un vecteur X par une variable réelle λ , on écrit :

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\lambda} \\ \frac{\partial y}{\lambda} \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire, si l'on note J_{X_e} la matrice jacobienne en X_e , en utilisant la linéarisation :

$$\dot{X} \approx J_{X_e}(X - X_e) \quad (3)$$

Il ne s'agit en fait que d'appliquer la formule de linéarisation que vous avez déjà vu pour les fonctions à une variable réelle :

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

On fait une approximation linéaire locale : concrètement, dans le cas d'une fonction f , on approxime la courbe par une droite autour du point x_0 . L'équation de la droite est : $y = \underbrace{f'(x_0)}_a x + \underbrace{f(x_0) - x_0 f'(x_0)}_b$.

On fait pareil dans le cas de fonctions à deux variables (comme ici pour nos fonctions $\dot{x} = (x, y)$ et $\dot{y} = (x, y)$). Sauf qu'on approxime des courbes en trois dimensions par des plans, autour d'un point particulier (en l'occurrence les équilibres, le plus souvent).

L'équation 3 donne donc, (deux équilibres comme exemples) :

$$\begin{aligned} \dot{X} &\approx \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 3 \\ 2\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \sqrt{3} \\ y - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + 3(y - 2) \\ 2\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + (y - 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (4\sqrt{3}x + 3y - 18) \\ 2\sqrt{3}x + y - 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\dot{X} \approx \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} & 3 \\ 2\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \sqrt{3} \\ y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4\sqrt{3}x + 3y - 21) \\ 2\sqrt{3}x + y - 9 \end{pmatrix}$$

Exercice

1. Les équilibres du système sont les points (x, y) tels que

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y - 2 \\ \dot{y} = \frac{x+y}{xy+10} \end{cases}$$

Le système

$$\begin{cases} 0 = x^2 - y - 2 \\ 0 = \frac{x+y}{xy+10} \end{cases}$$

Se résout très aisément. Remarquons que la deuxième équation implique :

$$x = -y \quad xy \neq -10$$

En reportant dans la première équation, on trouve à nouveau un binôme du second degré dont les solutions sont $y_e^1 = 2$ et $y_e^2 = -1$. Ce qui ne nous donne que deux équilibres :

$$\begin{cases} X_e^1 = (-2, 2) \\ X_e^2 = (1, -1) \end{cases}$$

2. On représente le diagramme de phase
3. La matrice jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ \frac{10-y^2}{(xy+10)^2} & \frac{10-x^2}{(xy+10)^2} \end{pmatrix}$$

On calcule $J_{X_e^1}$ et $J_{X_e^2}$, puis on linéarise comme dans l'exercice 1.

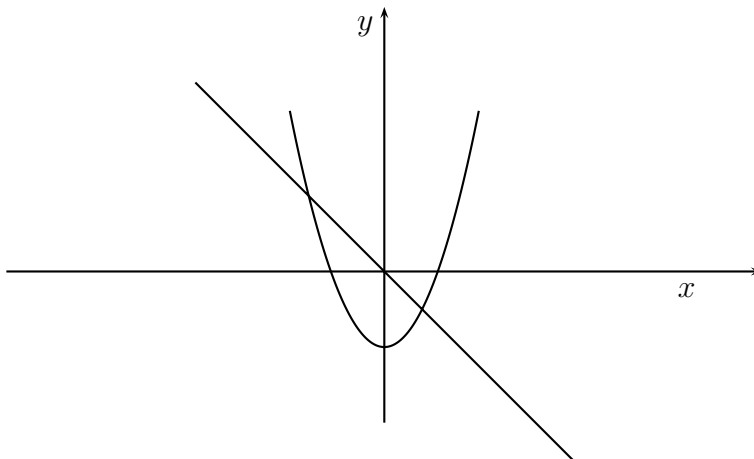


FIG. 3 – Diagramme de phase du système différentiel