

Le théorème de l'enveloppe

-----rappel de cours -----

Si $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont des fonctions de classe C^1 sur IR^n , alors (x_1^*, \dots, x_n^*) est candidat à être un extremum de $f(\cdot)$ sous la contrainte $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ s'il annule les n dérivées partielles du lagrangien $L(\cdot)$ défini par :

$$L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n)$$

et s'il vérifie la contrainte. On appelle λ « multiplicateur de Lagrange » associé à la contrainte.

Dans le cas où il y a p contraintes, il y a p multiplicateurs de Lagrange, le lagrangien étant de la forme $L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_i \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n)$.

Dans le cas où une contrainte s'écrit sous la forme d'inégalité, si elle n'est pas saturée au point candidat, alors le multiplicateur de Lagrange qui lui est associé est nul.

Exercice 1

Le théorème de l'enveloppe donne la variation de l'extremum d'une fonction (avec ou sans contraintes) à partir de celles de l'un ou l'autre de ses paramètres (ou de ceux de la contrainte). Si on se situe dans le cas le plus général, mais avec seulement deux variables, il s'obtient en dérivant « en chaîne » (par rapport à y) la fonction $F(\cdot)$ définie par :

$$F(y) = L(x_1(y), x_2(y), y),$$

où y est un paramètre quelconque du problème étudié dont $L(\cdot)$ est le lagrangien, et où $(x_1(y), x_2(y))$ est un point candidat (extremum possible) à la solution de ce problème, donc un point vérifiant la commission du premier ordre :

$$L'_{x_1}(x_1(y), x_2(y), y) = 0$$

$$L'_{x_2}(x_1(y), x_2(y), y) = 0.$$

- a) Comment interpréter la fonction $F(\cdot)$? *cette fonction est obtenue en additionnant la fonction dont on cherche l'extremum (disons $f(\cdot)$), à laquelle on ajoute la contrainte imposée aux variables x_1 et x_2 , multipliée par le mult. De Lagrange. Comme ici on se situe au point $(x_1(y), x_2(y))$ où cette contrainte est vérifiée, ce second terme est nul, et donc $F(\cdot)$ se réduit à la $f(x_1(y), x_2(y))$, c'est-à-dire la valeur extremum du programme (max ou min), pour y donné.*
- b) Donner sa dérivée en fonction de celles de celles de $L(\cdot)$ et des $x_i(\cdot)$, $i = 1, 2$. Interpréter le résultat obtenu. *En dérivant, on obtient la somme de 3 termes, les deux premiers comportant $L'_{x_1}(x_1(y), x_2(y), y)$ et $L'_{x_2}(x_1(y), x_2(y), y)$, qui sont nuls par définition du point candidat $(x_1(y), x_2(y))$. Il ne reste donc plus que $F'(y) = L'_y(x_1(y), x_2(y), y)$: c'est le théorème de l'enveloppe : pour obtenir la variation de la fonction extremum lorsque le paramètre y varie, il suffit de calculer la dérivée du Lagrangien par rapport à ce paramètre, en l'évaluant au point extremum $(x_1(y), x_2(y))$.*

Exercice 2

La fonction de coût d'une entreprise est :

$$C(q, q_c) = q_c + \frac{1}{2}q + 16/(q_c - q),$$

où q_c est la capacité de production et q la quantité produite.

- 1) Tracer assez précisément les courbes de coût de court terme $c(q, 4)$, $c(q, 8)$ et $c(q, 12)$ (la quantité produite ne peut dépasser la capacité de production). *Courbes croissantes ayant une asymptote verticale*
- 2) Déterminer la capacité de production $q_c(q)$ qui minimise le coût de l'entreprise pour n'importe quelle quantité produite q . *On dérive $c(\cdot)$ par rapport à q_c , et on annule la dérivée. On trouve $q_c = q + 4$.*
- 3) En déduire la fonction de coût à long terme $c_{LT}(\cdot)$ définie par :

$$c_{LT}(q) = C(q, q_c(q)).$$

La représenter sur le même graphe que celui tracé en 1). Que constate-t-on ?

On trouve $c_{LT}(q) = 3q/2 + 8$. Droite qui est tangente à chacune des courbes tracées (enveloppe inférieure).

- 4) Montrer que le coût marginal à long terme est égal au coût marginal à court terme, à condition que la capacité de production soit « adaptée » (minimise le coût) pour chaque quantité produite. *Le coût marginal à long terme $c_{LT}'(q)$ est ici égal à $3/2$.*

On aurait pu le trouver en appliquant le théorème de l'enveloppe en dérivant (ici c'est q qui joue le rôle de paramètre, le minimum étant cherché relativement à la capacité de production) : on dérive $C(q, q_c)$ par rapport à q , soit : $\frac{1}{2} + 16/(q_c - q)^2$ puis on remplace q_c par sa valeur optimale : $q + 4$. On obtient, oh miracle !, $3/2$.

Exercice 3

Soit $U(q_1, q_2)$ l'utilité procurée à un consommateur par le panier (q_1, q_2) . On prend :

$$U(q_1, q_2) = q_1^{1/2} q_2^{1/4}.$$

On suppose que le revenu du consommateur est R , les prix des biens étant égaux à 1.

1) Donner, en fonction de R , le choix $(q_1(R), q_2(R))$ du consommateur, aux prix donnés.

Classique Cobb douglas : $q_1(R) = 2R/3, q_2(R) = R/3$

2) Déterminer sa fonction d'utilité indirecte $V(\cdot)$, définie par :

$$V(R) = U(q_1(R), q_2(R)) (= L(q_1(R), q_2(R))).$$

$$V(R) = (2R/3)^{1/2} (R/3)^{1/4} = 2^{1/2} (R/3)^{3/4}.$$

Calculer sa dérivée.

3) Calculer le multiplicateur de Lagrange associé au choix du consommateur. Le comparer avec le résultat obtenu en 2). L'interpréter.

En appliquant le théorème de l'enveloppe au programme du consommateur, en prenant R pour paramètre, on obtient en dérivant le lagrangien, $\lambda(R)$ (le multiplicateur de Lagrange, obtenu en résolvant le pb du consommateur, dépend des valeurs des paramètres). Soit $V'(R) = \lambda(R)$. Résultat général que je vous laisse vérifier ici (on le détermine à partir de l'égalité $L'_{q_1}(q_1(R), q_2(R), R) = 0$, appliquée à la fonction d'utilité donnée.

On peut remarquer que $\lambda(R)$, appelé « utilité marginale de la monnaie » est un concept CARDINAL : si on avait pris pour fonction d'utilité représentant la même relation de préférence $q_1^2 q_2$ on aurait obtenu un multiplicateur $4R^3/81$: l'utilité marginale de la monnaie est croissante. Evidemment, les fonctions de demande ne varient pas.

4) On suppose que le prix du bien 1, p_1 , est quelconque. La fonction d'utilité indirecte $W(\cdot)$ est maintenant définie par :

$$W(R, p_1) = U(q_1(R, p_1), q_2(R, p_1)) (= L(q_1(R, p_1), q_2(R, p_1))).$$

Montrer que la demande $q_1(R, p_1)$ peut s'écrire à partir du rapport des dérivées de $W(\cdot)$.

En raison du théorème de l'enveloppe :

$$W_{p_1}'(R, p_1) = L_{p_1}'(q_1(R, p_1), q_2(R, p_1)) = -\lambda(R, p_1) \cdot q_1(R, p_1).$$

Comme (cf. question précédente) : $W_R'(R, p_1) = \lambda(R, p_1)$, le résultat demandé s'ensuit. La vérifier dans le cas présent (avec la fonction d'utilité donnée, les demandes étant $2R/3p_1$ et $R/3$ (puisque $p_2 = 1$)).