UFR 02 Math 3 **TD 4**
avec éléments de corrigé

Soit le processus (X_t) décrit par l'équation

(1) $X_{t+1} = \mathbf{A}X_t$, avec $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de la matrice **A - I** ?
Réponse : 2.

2. Donner l'ensemble des équilibres du processus défini par (1).
Réponse : X_e équilibre si $\mathbf{A}X_e = X_e$, donc si $(\mathbf{A} - \mathbf{I})X_e = 0$. Donc les équilibres appartiennent au noyau de **A – I**, qui est ici de dimension 1 (conséquence de 1.).

Les équilibres sont donc de la forme : $\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Ce processus est-il globalement stable ?.
Réponse **A** a une valeur propre « évidente » : 1/3 (les autres éléments de la 1ère ligne sont égaux à 0). Pour les deux autres valeurs propres, on peut raisonner avec la sous-matrice obtenue en enlevant la première ligne et la premières colonne de **A.** Comme sa trace (2 + 2 = 4) est strictement supérieure à 2, une au moins des valeurs propres est supérieure à 1, et il n'y a pas stabilité globale.

4. Déterminer les valeurs propres de **A.**
rép. On a déjà 1/3. Comme la somme des deux autres est 4 (trace de la sous matrice), et leur produit est égale à 4 – 1 = 3 (déterminant de la sous-matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$), « on voit que » 3 et 1 (somme 4, produit 3) sont les deux autres valeurs propres. En fait, on pouvait directement déduire de 2. que 1 est valeur propre de **A** (puisque $\mathbf{A}X_e = X_e$ a une solution autre que 0)

5. Donner l'ensemble de stabilité de $X_e = 0$.
rép. Il est engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module strictement

inférieur à 1. Donc, ici comme un vecteur propre associé à 1/3 est $\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix}$ l'ensemble de stabilité de 0 est de la forme $\{\alpha \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathrm{IR}\}$.

6. Trouver l'ensemble S tel que :

$$X \in S \Rightarrow (X_t) \text{ converge}$$

rép S est engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module inférieur ou égal à 1, donc par les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (associé à 1) et $\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix}$.
(associé à 1/3).

7. Donner la solution générale de (1)

rép $X_t = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 (1/3)^t \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix} + \alpha_1 3^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

où $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3. Evidemment, le terme indépendant de t, $\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, correspond aux divers équilibres possibles.